Теорема. *Пусть дан конденсатор* $C = \{E_0, E_1\}$, *где* $E_0 = \{(r, \bar{\varphi}) \mid r \geqslant R\}$, $E_1 = \{(r, \bar{\varphi}) \mid r \leqslant 1\}$ *и последовательность конденсаторов* $C_k = \{E_0, E_1\}$, *где* $E_0^k = \{(r, \bar{\varphi}) \mid r \geqslant \gamma_k(\bar{\varphi})\}$, $E_1^k = \{(r, \bar{\varphi}) \mid r \leqslant 1\}$. *Пусть также* $\gamma_k(\bar{\varphi}) = R - \alpha_k(\bar{\varphi})$, *где* $\alpha_k(\bar{\varphi})$ *равномерно на* $\Pi = [0, 2\pi] \times (0, \pi)^{n-2}$ *стремится к нулю при* $k \to \infty$, *причем*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{S_j^2 \gamma_k^2} \left(\frac{\partial \gamma_k}{\partial \varphi_j} \right)^2 = o(\alpha_k)$$

равномерно на Π. *Тогда*

$$\operatorname{cap} C_k - \operatorname{cap} C \leqslant \Sigma_k + o(\Sigma_k).$$

П. А. Мозоляко

Санкт-Петербургский государственный университет,

pmzlcroak@gmail.com

КОНЕЧНОСТЬ ВАРИАЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ВДОЛЬ НОРМАЛЕЙ К ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

В докладе изложены результаты совместной работы с В. П. Хавиным.

Пусть O — область в d-мерном пространстве $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, S — ее граница, которая считается достаточно гладкой. Для $p \in S$ через $\vec{N}(p)$ обозначим орт внутренней нормали к S в точке p. Отрезок $\{ta + (1-t)b,\ 0 < t \leqslant 1\}$ обозначим через $(a, b]$.

Пусть u — вещественная функция, заданная в O, $p \in S$. Величину

$$(\mathrm{Nvar}\ u)(p) := var\left(u|_{(p,p+\theta(p)\vec{N}(p)]}\right),$$

где $\theta(p)$ — достаточно малое положительное число, назовем нормальной вариацией функции u в точке p. Положим

$$V(u) := \{p \in S : (\mathrm{Nvar}\ u)(p) < +\infty\}.$$

Множество $E \subset S_1$, где $S_1 \subset S$, будем называть сверхплотным в S_1, если любой точки $p \in S_1$ и для любого $r > 0$

$$\dim(E \bigcap B^d(p,r)) = d - 1,$$

где $B^d(p,r)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром p радиуса r; dim обозначает хаусдорфову размерность.

В 1993 году, отвечая на один вопрос У. Рудина, Ж. Бургейн показал в [B1], что любая функция, ограниченная и аналитическая в единичном круге, отображает некоторые (и весьма многочисленные) радиусы этого круга на спрямляемые кривые. Там же было показано, что вариация любой вещественной ограниченной в круге гармонической функции вдоль многих радиусов конечна. Результат Бургейна доказывает тем самым следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функция u гармонична и ограничена в единичном круге $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, то множество $V(u)$ сверхплотно в $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$.*

В том же году Бургейн [B2] обобщил этот результат на положительные гармонические функции, заданные на верхней полуплоскости (в том числе на функции, представимые в виде сверток с аппроксимативными единицами, отличными от ядра

Пуассона), а в работе [ON] О'Нил в 2001 году перенес теорему Бургейна на полупространства в $\mathbb{R}^d$. Оказывается, теорему 1 можно обобщить на положительные гармонические функции, заданные на произвольных областях (с достаточно гладкой границей) пространства $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2. *Если функция u гармонична и положительна в области $O \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$ с C^2-глдакой границей, то множество $V(u)$ сверхплотно в $S = \partial O$.*

Как известно [ПК, HW], положительная в O гармоническая функция имеет конечный предел вдоль почти всех (по $(d-1)$-мерной мере Хаусдорфа) нормалей $\vec{N}(p)$ при стремлении к $p \in \in S$. Теорема 2 утверждает, что для многих нормалей $\vec{N}(p)$ это стремление проявляется в усиленной форме — величина $(\mathrm{Nvar}\ u)(p)$ оказывается конечной.

Точка $p \in S$ лежит в множестве $V(u)$, если конечна величина

$$(\mathrm{Mvar}\ u)(p) = \int_0^{\frac{1}{2}\theta(p)} W(p,y)\,dy,$$

где $W(p,y)$, $y > 0$, $p \in S$ есть значение в точке $p+2y\vec{N}(p)$ гармонической функции, значения которой на поверхности $S_y = = \{p + y\vec{N}(p)\}$ равны $|\nabla u|$.

Утверждение теоремы 2 обеспечивается существованием (для каждого положительного ε) вероятностной меры ν_ε, заданной на S и обладающей следующими свойствами: *в каждом шаре $B(p,r)$ радиуса r с центром в $p \in S$ мера ν_ε сосредоточена на множестве размерности $d-1$;*

$$\int_S (Mvar\ u)(p)\,d\nu_\varepsilon(p) \leqslant \frac{C}{\varepsilon},$$

где константа $C = C(O)$ *зависит только от области* O. Построение подобной меры составляет основную часть доказательства теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

[B1] Bourgain J. *On the radial variation of bounded analytical functions on the disc* // Duke Math. J. – 1993. – V. 69. – No 3. – P. 671-682.

[B2] Бургейн Ж. *Ограниченность вариации сверток мер* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 54. – № 4. – С. 25-34.

[ПК] Привалов И. И., Кузнецов П. И. *Граничные задачи и различные классы гармонических и субгармонических функций, определенных в произвольных областях* // Матем. сб. – 1939. – Т. 6 (48). – № 3. – С. 345-376.

[HW] Hunt R. A., Wheeden R. L. *Positive harmonic functions on lipschitz domains* // Trans. Amer. Math. Soc. J. – 1970. – V. 147. – P. 507-527.

[ON] O'Neill M. D. *Vertical variation of harmonic functions in upper half spaces* // Colloq. Math. – 2001. – V. 87. – P. 1-12.